FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Unha introdución aos polinomios de Bernstein

Ana Cao Ríos

Curso 2019/2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

- **Código:** MA_16_16
- **Área de coñecemento:** Matemática aplicada
- **Título:** Unha introdución aos polinomios de Bernstein
- **Director:** Rafael Muñoz Sola
- **Breve descrición do contido:** Os polinomios de Bernstein permiten construír unha aproximación polinómica dunha función continua f nun intervalo [a,b] a partir dos valores da función nun conxunto de puntos uniformemente espaciados. Tal aproximación, ademais de converxer uniformemente a f cando o número de puntos (e por tanto o grao do polinomio) tende a infinito, posúe certas propiedades interesantes: p. e. se f é crecente (resp. convexa) en [a,b], a aproximación é crecente (resp. convexa) en [a,b].

  O traballo constaría de dúas partes. A primeira estaría dedicada á recopilación das propiedades principais dos polinomios de Bernstein e da aproximación polinómica basada nos mesmos. A segunda parte consistiría nunha breve introdución ás curvas de Bézier, as cales se basan nos polinomios de Bernstein e se aplican na CAD.

Índice xeral

Resumo

Neste traballo preténdese que o lector adquira unha idea básica sobre os polinomios de Bernstein e as curvas de Bézier.

O capítulo 1 céntrase nos polinomios de Bernstein, nos polinomios de base de Bernstein e nas propiedades de ambos.

No capítulo 2 faise unha introdución ás curvas de Bézier, expóñense algunhas propiedades e explícase un algoritmo recursivo para evaluar as curvas de Bézier.

Abstract

This essay intends that the reader learns a basic idea about Bernstein polynomials and Bézier curves.

Chapter 1 focuses on Bernstein polynomials, Bernstein basis polynomials and properties of both.

In chapter 2, it does an introduction to Bézier curves, it shows some properties and it explains a recursive algorithm to evaluate Bézier curves.

Introdución

Os polinomios de Bernstein foron creados en 1912 polo matemático ucraniano Sergei Natanovich Bernstein para demostrar o teorema de Weierstrass. Ademais de ser usados para dita demostración, os polinomios de Bernstein úsanse para realizar aproximacións de funcións e para definir as curvas de Bézier; tamén teñen aplicacións en probabilidade. Estos polinomios proporciónannos unha aproximación da función e das súas derivadas e úsanse en análise numérico como método de aproximación.

Os polinomios de Bernstein permítennos aproximar unha función continua definida nun intervalo pechado e acotado. Ditos polinomios converxen uniformemente á función continua. O Teorema de Bernstein proba a existencia de polinomios de aproximación uniforme.

Para definir os polinomios de Bernstein usamos uns polinomios denominados "polinomios de base de Bernstein". Os polinomios de base de Bernstein de grao n pódense obter usando os polinomios de base de Bernstein de grao $n-1$ recursivamente. Isto mesmo sucede coas súas derivadas. Hai $n+1$ polinomios de base de Bernstein de grao n e forman unha base do espazo vectorial dos polinomios de grao menor ou igual ca n.

Xeometricamente as aproximacións de Bernstein dunha función continua atópanse entre os valores extremos da propia función; as derivadas primeiras e as de orde superior están acotadas (veremos na sección 1.5 ditas cotas). As funcións monótonas e convexas producen polinomios de Bernstein monótonos e convexos respectivamente. Polo tanto, os polonomios de Bernstein presentan propiedades interesantes e bastante útiles en métodos numéricos, pero teñen o inconvinte de que a converxencia da aproximación é lenta.

As curvas de Bézier surxen da necesidade de trazar curvas con moita precisión na industria aeronáutica e automovilística. O enxeñeiro francés Pierrre Bézier ideou un método de descrición matemática das curvas que se usa con éxito nos programas de CAD (deseño asistido por computadora). Logo Paul de Casteljau creou un algoritmo para evaluar as curvas de Bézier.

Debido á facilidade de uso das curvas de Bézier, estas teñen varias aplicacións, entre as cales destacan:

- Deseño gráfico
- Programas de animación vectorial, como Adobe Flash
- Programas de retoque fotográfico, como Photoshop
- Fontes de letras, nas cales se usan curvas de Bézier cuadráticas e cúbicas

As curvas de Bézier defínense usando os polinomios de base de Bernstein, polo cal hai relación entre os polinomios de Bernstein e estas curvas. Tamén se utilizan uns puntos chamados "puntos de control"; unha curva de grao n pode describirse con $n+1$ puntos de control. Dita curva tamén se pode obter interpolando as curvas de Bézier de grao $n-1$.

O algoritmo de de Casteljau consiste en coller pares de puntos de control dunha curva de Bézier e interpolalos para obter novos puntos, e seguir este proceso ata obter un só punto. É dicir, se temos unha curva de Bézier con n puntos de control, no primeiro paso obtemos $n-1$ puntos e debemos seguir repetindo o proceso ata obter un só punto.

Este traballo garda relación fundamentalmente coa asignatura "Cálculo Numérico nunha Variable" do Grao en Matemáticas. Úsanse tamén algúns conceptos e resultados vistos en:

- Espazos vectoriais e Cálculo Matricial
- Continuidade e Derivabilidade de Funcións dunha Variable Real
- Introdución á Análise Matemática
- Curvas e Superficies

Capítulo 1

Polinomios de Bernstein

Este capítulo trata sobre os polinomios de Bernstein: expresión, propiedades, derivadas...
Usaremos principalmente os libros [1, Cap. 6] e [2, Cap. 1, Sec. 4].

1.1 Introdución

En primeiro lugar imos definir os polinomios de Bernstein, pero para iso usaremos a seguinte notación:

$$p_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \qquad k = 0, \dots, n, \tag{1.1}$$

onde n é un enteiro, $n \geq 1$. Chamaremos *polinomios de base de Bernstein de grao* n aos $p_{n,k}(x)$, $k = 0, \dots, n$; esta terminoloxía débese a que este conxunto é unha base do espazo vectorial dos polinomios de grao menor ou igual que n, como veremos máis adiante.

Definición 1.1.1. *Sexa unha función f: [0,1]* $\to \mathbb{R}$ *dada. O* ***n-ésimo*** *(n* $\geq$ *1)* ***polinomio de Bernstein*** *para f(x) vén dado por:*

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) p_{n,k}(x). \tag{1.2}$$

É fácil ver que $B_n(f;0) = f(0)$ e $B_n(f;1) = f(1)$. Tamén observamos que grao$(B_n(f;x)) \leq n$ (incluso pode ser $< n$).

1.2 Propiedades elementais

Nesta sección enunciaremos e demostraremos algunhas propiedades básicas dos polinomios de base de Bernstein.
Seguiremos esencialmente o libro [1, Cap. 6, Sec. 2] salvo na demostración da proposición 1.2.1, para a cal nos basamos nunha parte da demostración do teorema 4 do libro [3, Cap. 1].

Proposición 1.2.1. *Cúmprense as seguintes identidades:*

$$\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) = 1 \tag{1.3}$$

$$\sum_{k=0}^{n} kp_{n,k}(x) = nx \tag{1.4}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 p_{n,k}(x) = n^2x^2 + nx(1-x) \tag{1.5}$$

Demostración. A identidade (1.3) dedúcese inmediatamente de $1 = 1^n = (x + (1-x))^n$ aplicando o desenvolvemento do binomio.

Vexamos a demostración da identidade (1.4):

$$\sum_{k=0}^{n} kp_{n,k}(x) = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k} = n\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$= n\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!}x^{j+1}(1-x)^{n-1-j} = nx\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j}x^j(1-x)^{n-1-j} = nx$$

Para probar (1.5) demostraremos que:

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)p_{n,k}(x) = n(n-1)x^2 \tag{1.6}$$

e usaremos a igualdade

$$\sum_{k=0}^{n} k^2p_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)p_{n,k}(x) + \sum_{k=0}^{n} kp_{n,k}(x) = n(n-1)x^2 + nx = n^2x^2 + nx(1-x)$$

onde temos usado (1.6) e (1.4).

Demostremos agora a identidade (1.6):

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)p_{n,k}(x) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\frac{n!}{k!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$= n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(k-2)![(n-2)-(k-2)]!}x^k(1-x)^{n-k} = n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$= n(n-1)\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}x^{j+2}(1-x)^{n-j-2} = n(n-1)x^2\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}x^j(1-x)^{n-2-j} = n(n-1)x^2$$

$\square$

Observación 1.2.1. *A interpretación destas identidades en termos de B_n é a seguinte:*

A identidade (1.3) equivale a $B_n(1;x) = 1$ e recibe o nome de partición da unidade.

A identidade (1.4) equivale a $B_n(x;x) = x$.

A identidade (1.5) equivale a $B_n(x^2;x) = x^2 + \frac{1}{n}x(1-x)$.

Téñense tamén as seguintes propiedades:

- *Positividade:* $p_{n,k}(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0,1]$
- *Simetría:* $p_{n,k}(x) = p_{n,n-k}(1-x) \quad \forall x \in [0,1] \quad k = 0, \ldots, n$

Proposición 1.2.2. *Cúmprense as seguintes fórmulas de recurrencia:*

$$p_{n,i}(x) = (1-x)p_{n-1,i}(x) + xp_{n-1,i-1}(x) \quad i = 1, \ldots, n-1 \tag{1.7}$$

$$p_{n,0}(x) = (1-x)p_{n-1,0}(x) \tag{1.8}$$

$$p_{n,n}(x) = xp_{n-1,n-1}(x) \tag{1.9}$$

Demostración. Caso $1 \leq i \leq n-1$:

$$(1-x)p_{n-1,i}(x) + xp_{n-1,i-1}(x) = (1-x)\binom{n-1}{i}x^i(1-x)^{n-1-i} + x\binom{n-1}{i-1}x^{i-1}(1-x)^{n-i}$$

$$= \binom{n-1}{i}x^i(1-x)^{n-i} + \binom{n-1}{i-1}x^i(1-x)^{n-i} = \left[\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}\right]x^i(1-x)^{n-i}$$

$$= \binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i} = p_{n,i}(x)$$

onde temos usado a igualdade do "triángulo de Tartaglia":

$$\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} = \binom{n}{i}$$

Caso $i = 0$:

$$p_{n,0}(x) = \binom{n}{0} x^0 (1-x)^{n-0} = \frac{n!}{0!(n-0)!}(1-x)^n = (1-x)^n$$

$$(1-x)p_{n-1,0}(x) = (1-x)\binom{n-1}{0} x^0 (1-x)^{n-1-0} = \frac{(n-1)!}{0!(n-1)!}(1-x)^n = (1-x)^n$$

Caso $i = n$:

$$p_{n,n}(x) = \binom{n}{n} x^n (1-x)^{n-n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} x^n = x^n$$

$$xp_{n-1,n-1}(x) = x\binom{n-1}{n-1} x^{n-1} (1-x)^{n-1-n+1} = \frac{(n-1)!}{(n-1)!(n-1-n+1)!} x^n = x^n$$

□

Proposición 1.2.3. *Cúmprense as seguintes identidades:*

$$p'_{n,i}(x) = n(p_{n-1,i-1}(x) - p_{n-1,i}(x)) \quad i = 1, \ldots, n-1 \tag{1.10}$$

$$p'_{n,0}(x) = -np_{n-1,0}(x) \tag{1.11}$$

$$p'_{n,n}(x) = np_{n-1,n-1}(x) \tag{1.12}$$

Demostración. Caso $1 \leq i \leq n-1$:

$$p_{n,i}(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \Rightarrow p'_{n,i}(x) = \binom{n}{i}[ix^{i-1}(1-x)^{n-i} - x^i(n-i)(1-x)^{n-i-1}]$$

$$= i\binom{n}{i} x^{i-1}(1-x)^{n-i} - (n-i)\binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i-1}$$

Nótese que

$$i\binom{n}{i} = n\binom{n-1}{i-1}$$

e

$$(n-i)\binom{n}{i} = n\binom{n-1}{i}$$

Polo cal obtemos

$$p'_{n,i}(x) = n\binom{n-1}{i-1} x^{i-1}(1-x)^{n-i} - n\binom{n-1}{i} x^i (1-x)^{n-i-1} = np_{n-1,i-1}(x) - np_{n-1,i}(x)$$

Caso $i = 0$:

$$p_{n,0}(x) = (1-x)^n \Rightarrow p'_{n,0}(x) = -n(1-x)^{n-1} = -np_{n-1,0}(x)$$

Caso $i = n$:

$$p_{n,n}(x) = x^n \Rightarrow p'_{n,n}(x) = nx^{n-1} = np_{n-1,n-1}(x)$$

□

Denotaremos $\mathbb{P}_n$ ao espazo vectorial dos polinomios de grao $\leq n$.

Proposición 1.2.4. *O conxunto* $\{p_{n,k}\}_{k=0}^n$ *é unha base de* $\mathbb{P}_n$.

Demostración. Como $card\{p_{n,k}\}_{k=0}^n = n+1 = dim\mathbb{P}_n$, basta ver que $\{p_{n,k}\}_{k=0}^n$ é linealmente independente. É dicir, temos que demostrar que

$$\sum_{k=0}^{n} c_k p_{n,k}(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1] \Rightarrow c_k = 0 \quad \forall k = 0, \dots, n$$

Tomando $x = 0$ en (1.1), obtemos

$$p_{n,k}(0) = 0, k \geq 1$$

$$p_{n,0}(0) = 1,$$

polo tanto

$$\sum_{k=0}^{n} c_k p_{n,k}(0) = 0 \Leftrightarrow c_0 p_{n,0}(0) = 0 \Leftrightarrow c_0 = 0$$

Agora temos que ver que

$$\sum_{k=1}^{n} c_k p_{n,k}(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1] \Rightarrow c_k = 0 \quad \forall k = 1, \dots, n$$

Usando (1.1), podemos concluír que $x = 0$ é raíz de $p_{n,k}(x)$ de multiplicidade k, $1 \leq k \leq n$. En particular,

$$p'_{n,k}(0) = 0, k \geq 2 \tag{1.13}$$

$$p'_{n,1}(0) \neq 0 \tag{1.14}$$

Temos que

$$\sum_{k=1}^{n} c_k p_{n,k}(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1] \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} c_k p'_{n,k}(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

Tomando $x = 0$ e tendo en conta (1.13) e (1.14), deducimos que $c_1 = 0$.
Polo tanto,

$$\sum_{k=2}^{n} c_k p_{n,k}(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

Evaluando agora a derivada segunda en $x = 0$ e razoando analogamente, deducimos que $c_2 = 0$.
Seguindo este proceso obtemos que $c_k = 0$ para todo $k = 2, \dots, n-1$. Vexamos o caso $k = n$

$$p_{n,n}(x) = \binom{n}{n} x^n (1-x)^{n-n} = x^n \Rightarrow p_{n,n}^{(n)}(x) = n!$$

por conseguinte

$$c_n p_{n,n}^{(n)}(x) = 0 \Leftrightarrow c_n = 0$$

Concluíndo,

$$\sum_{k=0}^{n} c_k p_{n,k}(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1] \Rightarrow c_k = 0 \quad \forall k = 0, \dots, n$$

co cal $\{p_{n,k}\}_{k=0}^{n}$ é linealmente independente, polo que é unha base de $\mathbb{P}_n$, como queríamos demostrar.

□

1.3 Propiedades de aproximación

Nesta sección veremos algunhas propiedades dos polinomios de Bernstein en canto á aproximación. Destacarán os teoremas de Bernstein e Weierstrass. Para isto seguimos o libro [1, Cap. 6, Sec. 2].

Lema 1.3.1. *Satisfaise a identidade*

$$\sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x) \tag{1.15}$$

Demostración. Desenvolvemos a suma e usamos as identidades (1.3)-(1.5), como segue:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 p_{n,k}(x) &= \sum_{k=0}^{n} k^2 p_{n,k}(x) - 2nx \sum_{k=0}^{n} k p_{n,k}(x) + n^2x^2 \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) \\ &= n^2x^2 + nx(1-x) - 2n^2x^2 + n^2x^2 = nx(1-x)\end{aligned}$$

□

Corolario 1.3.1. *Cúmprese que*

$$\sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \le \frac{n}{4} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1.16}$$

O corolario resulta de (1.15) e da desigualdade

$$x(1-x) \le \frac{1}{4} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lema 1.3.2. *Para $\delta > 0$ dado e $x \in [0,1]$, tense que*

$$\sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| \ge \delta} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \le \frac{1}{4n\delta^2}$$

Demostración. Como $\left|\frac{k}{n}-x\right| \geq \delta$, tense que

$$\frac{1}{\delta^2}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 \geq 1$$

Por conseguinte,

$$\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geq \delta} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geq \delta} \left(\frac{k}{n}-x\right)^2 \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$$

$$\leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}-x\right)^2 \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{\delta^2 n} \leq \frac{1}{4n\delta^2},$$

onde na última igualdade temos usado o lema 1.3.1.

□

Teorema 1.3.1. *(Teorema de Bernstein) Sexa $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ unha función limitada. Entón*

$$\lim_{n\to\infty} B_n(f;x) = f(x) \tag{1.17}$$

en cada punto $x \in [0,1]$ no que f é continua. Se $f \in C([0,1])$, o límite é uniforme en $[0,1]$.

Demostración. Multiplicando ambos lados da igualdade (1.3) por $f(x)$ obtemos:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x) p_{n,k}(x).$$

Por conseguinte,

$$f(x) - B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(x)p_{n,k}(x) - \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) p_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^{n} \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right] p_{n,k}(x)$$

$$= \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|< \delta} \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right] p_{n,k}(x) + \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geq \delta} \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right] p_{n,k}(x) \tag{1.18}$$

Sexa x un punto de continuidade de f. Estudiemos agora os dous sumandos por separado. Comezaremos polo primeiro sumando, onde usaremos a definición de continuidade dunha función nun punto:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \,/\, |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon,$$

en particular, para todo enteiro k, $0 \leq k \leq n$ tal que $\left|x - \frac{k}{n}\right| < \delta$ tense que $\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| < \varepsilon$, e por tanto

$$\left|\sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta} \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right] p_{n,k}(x)\right| < \varepsilon \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta} p_{n,k}(x) < \varepsilon \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) = \varepsilon \tag{1.19}$$

onde temos usado a positividade dos $p_{n,k}(x)$ e a identidade (1.3).

Estudiaremos agora o segundo sumando. Por hipótese a función f é limitada en $[0,1]$, polo cal existe unha constante $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [0,1]$. Polo tanto,

$$\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \leq \left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| + |f(x)| \leq M + M = 2M.$$

Con isto obtemos que:

$$\left|\sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \delta} \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right] p_{n,k}(x)\right| \leq 2M \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \delta} p_{n,k}(x) \leq \frac{2M}{4n\delta^2} = \frac{M}{2n\delta^2} \tag{1.20}$$

onde temos usado o lema 1.3.2.

Usando as acotacións (1.19) e (1.20) na descomposición (1.15) obtemos:

$$|f(x) - B_n(f;x)| < \varepsilon + \frac{M}{2n\delta^2}.$$

Para n suficientemente grande, $\frac{M}{2n\delta^2} < \varepsilon$. Polo tanto, $|f(x) - B_n(f;x)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$, e como ε é arbitrario,

$$\lim_{n\to\infty} B_n(f;x) = f(x).$$

Supoñamos agora que $f \in C([0,1])$. Dado que f é uniformemente continua en $[0,1]$, verifícase que: dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x, y \in [0,1]$, $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. O valor de δ é independente do $x \in [0,1]$ escollido, polo que o límite (1.17) é uniforme en $[0,1]$.

□

Corolario 1.3.2. *Se $f \in C([0,1])$, dado $\varepsilon > 0$, temos que para n suficientemente grande,*

$$|f(x) - B_n(f;x)| \leq \varepsilon, \quad 0 \leq x \leq 1$$

O corolario anterior implica, en particular, que dados calquera $f \in C([0,1])$ e calquer $\varepsilon > 0$ podemos atopar un polinomio $p(x)$ tal que

$$|f(x) - p(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [0,1].$$

Esta afirmación constitúe o enunciado do teorema de Weierstrass no caso particular do intervalo $[0,1]$. Pasamos a enunciar dito teorema no caso xeral dun intervalo $[a,b]$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Teorema 1.3.2. *(Teorema de Weierstrass) Sexa $f \in C([a,b])$, dado $\varepsilon > 0$ podemos atopar un polinomio $p(x)$ tal que $|f(x) - p(x)| \leq \varepsilon$ para todo $a \leq x \leq b$.*

Demostración. Deduciremos o resultado xeral a partir do xa demostrado para o intervalo $[0,1]$.

Sexa $g : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ a función definida por $g(y) = f(a + (b-a)y)$; tense que g é continua en $[0,1]$. Dado $\varepsilon > 0$, podemos atopar un polinomio $h(y)$ tal que

$$|g(y) - h(y)| \leq \varepsilon, \quad 0 \leq y \leq 1 \tag{1.21}$$

Sexa o polinomio en x, $p(x) = h\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$.

$$\left| g\left(\frac{x-a}{b-a}\right) - h\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \right| = \left| f(x) - h\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \right| = |f(x) - p(x)| \tag{1.22}$$

onde temos usado a igualdade:

$$g\left(\frac{x-a}{b-a}\right) = f\left(a + (b-a)\frac{x-a}{b-a}\right) = f(x).$$

A transformación lineal $y = \frac{x-a}{b-a}$ aplica bixectivamente $[a,b]$ en $[0,1]$. Polo que, en virtude da desigualdade (1.21)

$$\left| g\left(\frac{x-a}{b-a}\right) - h\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \right| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [a,b],$$

con $\varepsilon > 0$ dado. De isto e (1.22) deducimos que $|f(x) - p(x)| \leq \varepsilon$ para todo $a \leq x \leq b$. □

1.4 Derivadas dos polinomios de Bernstein

Vexamos agora a expresión das derivadas dos polinomios de Bernstein. Veremos cales son as expresións de $B_n'(f;x)$ e de $B_n^{(k)}(f;x)$ e usaremos as diferenzas finitas progresivas (ver Apéndice). Tamén imos ver a que se aproxima $B_n^{(k)}(f;x)$ cando n tende a infinito.

Todo isto séguese do libro [2, Cap. 1, Sec. 4], excepto o teorema 1.4.1 que se segue do libro [1, Teorema 6.3.2].

Lema 1.4.1. *Sexa $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ unha función, tense que*

$$B_n'(f;x) = n \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-k-1} \tag{1.23}$$

Demostración. Derivando a ecuación (1.2) obtense:

$$B_n'(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) p_{n,k}'(x)$$

Usando a proposición 1.2.3

$$B_n'(f;x) = \sum_{k=1}^{n-1}\left[f\left(\frac{k}{n}\right) n(p_{n-1,k-1}(x) - p_{n-1,k}(x))\right] - nf(0)p_{n-1,0}(x) + nf(1)p_{n-1,n-1}(x)$$

$$= n\left[\sum_{k=0}^{n-2} f\left(\frac{k+1}{n}\right) p_{n-1,k}(x) - \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) p_{n-1,k}(x) - f(0)p_{n-1,0}(x) + f(1)p_{n-1,n-1}(x)\right]$$

$$= n\left[\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) p_{n-1,k}(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) p_{n-1,k}(x)\right] = n\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) p_{n-1,k}(x)$$

$$= n\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\binom{n-1}{k} x^k(1-x)^{n-k-1}$$

□

Usando diferenzas finitas progresivas (ver Apéndice), podemos reescribir a ecuación (1.23) na forma

$$B_n'(f;x) = n\sum_{k=0}^{n-1} \Delta f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n-1}{k} x^k(1-x)^{n-k-1}$$

Nótese que o segundo membro é da forma (1.2) pero con n cambiado por $n-1$ e os valores $f\left(\frac{k}{n}\right)$ cambiados por $\Delta f\left(\frac{k}{n}\right)$. Esta observación permítenos iterar o proceso para obter as derivadas sucesivas.
Co explicado no apéndice e derivando k veces a expresión (1.2), obtemos:

$$B_n^{(k)}(f;x) = n(n-1)\dots(n-k+1)\sum_{j=0}^{n-k} \Delta^k f\left(\frac{j}{n}\right)\binom{n-k}{j} x^j(1-x)^{n-j-k} \quad k = 1,\dots,n. \tag{1.24}$$

En particular para $x = 0$:

$$B_n^{(k)}(f;0) = n(n-1)\dots(n-k+1)\Delta^k f(0)$$

co cal podemos obter a expresión de $B_n(f,x)$ en termos das potencias de x :

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} B_n^{(k)}(f,0)x^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Delta^k f(0)x^k$$

Teorema 1.4.1. *Se $f \in C^k([0,1])$, entón:*

$$\lim_{n\to\infty} B_n^{(k)}(f;x) = f^{(k)}(x) \tag{1.25}$$

uniformemente en $[0,1]$.

Demostración. Usando (16) do apéndice, obtemos

$$\Delta^k f\left(\frac{j}{n}\right) = \frac{1}{n^k} f^{(k)}(\xi_j) \qquad \frac{j}{n} < \xi_j < \frac{j+k}{n} \quad j = 0, \dots, n-k$$

Pola igualdade (1.24), con $x \in [0,1]$

$$B_n^{(k)}(f;x) = n(n-1)\dots(n-k+1)\sum_{j=0}^{n-k} \frac{1}{n^k} f^{(k)}(\xi_j) p_{n-k,j}(x)$$

$$\Rightarrow \frac{n^k}{n(n-1)\dots(n-k+1)} B_n^{(k)}(f;x) = \sum_{j=0}^{n-k} f^{(k)}(\xi_j) p_{n-k,j}(x)$$

Esta ecuación implica

$$\frac{n^k}{n(n-1)\dots(n-k+1)} B_n^{(k)}(f;x) = \sum_{j=0}^{n-k} f^{(k)}\left(\frac{j}{n-k}\right) p_{n-k,j}(x) + \sum_{j=0}^{n-k}\left[f^{(k)}(\xi_j) - f^{(k)}\left(\frac{j}{n-k}\right)\right] p_{n-k,j}(x) \tag{1.26}$$

Supoñendo $f \in C^k([0,1])$, polo teorema 1.3.1 temos

$$\sum_{j=0}^{n-k} f^{(k)}\left(\frac{j}{n-k}\right) p_{n-k,j}(x) \to f^{(k)}(x) \tag{1.27}$$

uniformemente en $[0,1]$.

Por outro lado, como

$$\frac{j}{n} \le \frac{j}{n-k} \le \frac{j+k}{n}$$

e

$$\frac{j}{n} < \xi_j < \frac{j+k}{n}$$

deducimos que

$$\left|\xi_j - \frac{j}{n-k}\right| < \frac{j+k}{n} - \frac{j}{n} = \frac{k}{n}$$

Dado que $f \in C^k([0,1])$ tense que $f^{(k)}$ é continua no compacto $[0,1]$ e polo tanto $f^{(k)}$ é uniformemente continua en $[0,1]$. Polo cal, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|x-y| < \delta$, entón

$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Podemos atopar n_0 tal que $\dfrac{k}{n_0} \leq \delta$. Entón, para todo $n \geq n_0$ e $j = 0, \dots, n-k$, terase que $\left|\xi_j - \dfrac{j}{n-k}\right| < \delta$, e polo tanto $\left|f^{(k)}(\xi_j) - f^{(k)}\left(\dfrac{j}{n-k}\right)\right| < \varepsilon$. Disto obtemos

$$\left|\sum_{j=0}^{n-k}\left[f^{(k)}(\xi_j) - f^{(k)}\left(\frac{j}{n-k}\right)\right]p_{n-k,j}(x)\right| \leq \sum_{j=0}^{n-k}\left|f^{(k)}(\xi_j) - f^{(k)}\left(\frac{j}{n-k}\right)\right|p_{n-k,j}(x)$$

$$< \varepsilon\sum_{j=0}^{n-k}p_{n-k,j}(x) = \varepsilon \quad \forall x \in [0,1].$$

Isto, xunto con (1.26) e (1.27) implica que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{n(n-1)\dots(n-k+1)}B_n^{(k)}(f;x) = f^{(k)}(x)$$

uniformemente en $[0,1]$.

Como ademais,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{n(n-1)\dots(n-k+1)} = 1,$$

concluímos que

$$\lim_{n\to\infty}B_n^{(k)}(f;x) = f^{(k)}(x)$$

uniformemente en $[0,1]$.

□

1.5 Acotacións, monotonía e convexidade

Neste apartado veremos as cotas da derivada k-ésima dos polinomios de Bernstein, así como o comportamento de $B_n(f;x)$ se a función f é monótona crecente ou convexa en $[0,1]$.
Os teoremas desta sección foron extraídos de [1, Cap. 6, Sec. 3].

Teorema 1.5.1. *Sexa k un número enteiro con $0 \leq k \leq n$. Se*

$$m \leq f^{(k)}(x) \leq M \quad \forall x \in [0,1] \tag{1.28}$$

entón:

$$m \leq \frac{n^k}{n(n-1)\dots(n-k+1)}B_n^{(k)}(f;x) \leq M \quad \forall x \in [0,1] \tag{1.29}$$

No caso $k = 0$, o cociente anterior interpretarase como 1.
Se

$$f^{(k)}(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

entón:

$$B_n^{(k)}(f;x) \geq 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

Demostración. No caso $k \geq 1$, usando a igualdade (16) (ver apéndice) obtemos

$$\Delta^k f\left(\frac{j}{n}\right) = \frac{1}{n^k} f^{(k)}(\xi_j) \qquad \frac{j}{n} < \xi_j < \frac{j+k}{n}$$

No caso $k = 0$, a igualdade anterior é certa para $\xi_j = \dfrac{j}{n}$.

Substituíndo isto en (1.24)

$$B_n^{(k)}(f;x) = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \sum_{j=0}^{n-k} f^{(k)}(\xi_j)\binom{n-k}{j} x^j (1-x)^{n-j-k},$$

é dicir,

$$\frac{n^k}{n(n-1)\dots(n-k+1)} B_n^{(k)}(f;x) = \sum_{j=0}^{n-k} f^{(k)}(\xi_j)\binom{n-k}{j} x^j (1-x)^{n-j-k}$$

Tendo en conta (1.28) e que $x^j(1-x)^{n-j-k} \geq 0$ en $[0,1]$

$$m = m\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j} x^j(1-x)^{n-j-k} \leq \frac{n^k}{n(n-1)\dots(n-k+1)} B_n^{(k)}(f;x)$$

$$\leq M\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j} x^j(1-x)^{n-j-k} = M$$

Disto deducimos (1.29).

Vexamos agora a segunda parte do teorema, se tomamos $m = 0$ séguese:

$$f^{(k)}(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0,1] \Rightarrow \frac{n^k}{n(n-1)\dots(n-k+1)} B_n^{(k)}(f;x) \geq 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

e como $0 \leq k \leq n$

$$\frac{n^k}{n(n-1)\dots(n-k+1)} > 0$$

Polo tanto, $B_n^{(k)}(f;x) \geq 0$ para todo $x \in [0,1]$.

□

Teorema 1.5.2. *Sexa* $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ *unha función monótona crecente en* $[0,1]$*, entón* $B_n(f;x)$ *é monótona crecente en* $[0,1]$*.*

Demostración. Se f é unha función monótona crecente

$$f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \geq 0 \quad \forall k = 0, \dots, n-1$$

Usando a expresión (1.23) obtemos que

$$B_n'(f;x) \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

Polo cal $B_n(f;x)$ é monótona crecente en $[0,1]$. □

Proposición 1.5.1. *Se existe $f''(x)$ en (a,b), $f(x)$ é convexa en todo subintervalo pechado de (a,b) se e só se $f''(x) \geq 0$ en (a,b).*

Esta proposición é un resultado coñecido (pódese consultar [1, teorema 3.2.1]).

Teorema 1.5.3. *Sexa $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ unha función convexa en $[0,1]$, entón $B_n(f;x)$ é convexa en $[0,1]$.*

Demostración. Se f é unha función convexa, da igualdade (15) con $x_0 = \dfrac{j}{n}$ (ver apéndice A) deducimos que

$$\Delta^2 f\left(\frac{j}{n}\right) \geq 0 \quad \forall j = 0, \dots, n-2$$

Usando a expresión (1.24) con $k = 2$ obtemos

$$B_n''(f;x) \geq 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

Tendo en conta a proposición 1.5.1 deducimos que $B_n(f;x)$ é convexa en todo subintervalo pechado de $(0,1)$. Pero como $B_n(f;x)$ é continua, é convexa en $[0,1]$. □

Teorema 1.5.4. *Sexa $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ unha función convexa en $[0,1]$. Entón*

$$B_{n-1}(f;x) \geq B_n(f;x), \quad 0 < x < 1, n \geq 2 \tag{1.30}$$

Demostración.

$$B_{n-1}(f;x) - B_n(f;x) = \sum_{l=0}^{n-1} f\left(\frac{l}{n-1}\right) p_{n-1,l}(x) - \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) p_{n,k}(x)$$

$$= f(0)(1-x)^{n-1} + \sum_{l=1}^{n-1} f\left(\frac{l}{n-1}\right) p_{n-1,l}(x) - f(0)(1-x)^n - f(1)x^n - \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) p_{n,k}(x)$$

Sacando factor comun $(1-x)^n$ e pasándoo para o lado esquerdo da igualdade quédanos:

$$(1-x)^{-n}(B_{n-1}(f;x) - B_n(f;x))$$

$$= \left[\frac{f(0)}{1-x} + \sum_{l=1}^{n-1} f\left(\frac{l}{n-1}\right)\binom{n-1}{l}\frac{x^l}{(1-x)^{l+1}} - f(0) - f(1)\frac{x^n}{(1-x)^n} - \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}\frac{x^k}{(1-x)^k}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{1-x}\left(f(0) + \sum_{l=1}^{n-1} f\left(\frac{l}{n-1}\right)\binom{n-1}{l}\frac{x^l}{(1-x)^l}\right) - f(0) - f(1)\frac{x^n}{(1-x)^n} - \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}\frac{x^k}{(1-x)^k}\right]$$

Facendo o cambio de variable $t = \dfrac{x}{1-x}$ obtemos:

$$(1+t)^n(B_{n-1}(f;x) - B_n(f;x))$$

$$= (1+t)\left[f(0) + \sum_{l=1}^{n-1} f\left(\frac{l}{n-1}\right)\binom{n-1}{l}t^l\right] - f(0) - f(1)t^n - \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}t^k$$

$$= \sum_{l=1}^{n-1} f\left(\frac{l}{n-1}\right)\binom{n-1}{l}t^l + tf(0) + t\sum_{l=1}^{n-1} f\left(\frac{l}{n-1}\right)\binom{n-1}{l}t^l - f(1)t^n - \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}t^k$$

$$= \sum_{l=1}^{n-1} f\left(\frac{l}{n-1}\right)\binom{n-1}{l}t^l + \sum_{l=0}^{n-1} f\left(\frac{l}{n-1}\right)\binom{n-1}{l}t^{l+1} - f(1)t^n - \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}t^k$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n-1}\right)\binom{n-1}{k}t^k + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k-1}{n-1}\right)\binom{n-1}{k-1}t^k - \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}t^k$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}t^k\left[\frac{1}{k}f\left(\frac{k}{n-1}\right) + \frac{1}{n-k}f\left(\frac{k-1}{n-1}\right) - \frac{n}{k(n-k)}f\left(\frac{k}{n}\right)\right] \tag{1.31}$$

Temos que $\dfrac{k-1}{n-1} < \dfrac{k}{n} < \dfrac{k}{n-1}$ e que f é unha función convexa por hipótese, polo tanto

$$\frac{1}{k}f\left(\frac{k}{n-1}\right) + \frac{1}{n-k}f\left(\frac{k-1}{n-1}\right) - \frac{n}{k(n-k)}f\left(\frac{k}{n}\right) \geq 0 \tag{1.32}$$

Para obter a desigualdade anterior, abonda escribir

$$\frac{k}{n} = \lambda\frac{k}{n-1} + (1-\lambda)\frac{k-1}{n-1}$$

onde $\lambda = 1 - \dfrac{k}{n} \in (0,1)$ xa que $k = 1, \ldots, n-1$ e $n \geq 2$.

En virtude da convexidade de f,

$$f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \lambda f\left(\frac{k}{n-1}\right) + (1-\lambda)f\left(\frac{k-1}{n-1}\right) = \frac{n-k}{n}f\left(\frac{k}{n-1}\right) + \frac{k}{n}f\left(\frac{k-1}{n-1}\right).$$

Multiplicando esta desigualdade por $\dfrac{n}{k(n-k)} > 0$, obtense unha desigualdade equivalente a (1.32).

En conclusión, de (1.31) e (1.32) séguese que

$$(1+t)^n(B_{n-1}(f;x) - B_n(f;x)) \geq 0$$

e como $1 + t = \dfrac{1}{1-x} > 0$ para todo $x \in (0,1)$, obtemos (1.30), como queríamos demostrar.

$\square$

1.6 Orde de aproximación

Ata agora vimos unha serie de propiedades da aproximación dunha función polos seus polinomios de Bernstein que resultan de interese, pero desafortunadamente a converxencia da aproximación é lenta, aínda no caso de que a función aproximada sexa moi regular. Isto resulta do teorema de Voronowskaja.
Para esta sección usaremos o libro [1, Cap. 6, Sec. 3].

Lema 1.6.1. *Existe unha constante c independente de n tal que*

$$\sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| \geq n^{-1/4}} p_{n,k}(x) \leq \frac{c}{n^{3/2}} \quad \forall x \in [0,1]$$

Demostración. Denotamos

$$S_m(x) = \sum_{k=0}^{n} (k - nx)^m p_{n,k}(x)$$

Usando (1.3), (1.4) e (1.15),

$$S_0(x) = \sum_{k=0}^{n} (k - nx)^0 p_{n,k}(x) = 1 \tag{1.33}$$

$$S_1(x) = \sum_{k=0}^{n} (k - nx)^1 p_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^{n} k p_{n,k}(x) - nx \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) = 0 \tag{1.34}$$

$$S_2(x) = \sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 p_{n,k}(x) = nx(1 - x) \tag{1.35}$$

Calculamos $S'_m(x)$ e obtemos

$$\sum_{k=0}^{n} \left[-mn(k - nx)^{m-1} p_{n,k}(x) + (k - nx)^m k \binom{n}{k} x^{k-1}(1 - x)^{n-k} - (k - nx)^m (n - k) \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k-1} \right]$$

$$= -mnS_{m-1}(x) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k - nx)^m x^{k-1} (1 - x)^{n-k-1} [k(1 - x) - (n - k)x]$$

$$= -mnS_{m-1}(x) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k - nx)^{m+1} x^{k-1} (1 - x)^{n-k-1} = -mnS_{m-1}(x) + \frac{S_{m+1}(x)}{x(1 - x)}$$

Polo tanto,

$$S_{m+1}(x) = x(1 - x)[S'_m(x) + mnS_{m-1}(x)]$$

Con isto observamos que $S_m(x)$ é un polinomio en x e en n e que

$$S_3(x) = x(1-x)[S_2'(x) + 2nS_1(x)]$$

$$S_4(x) = x(1-x)[S_3'(x) + 3nS_2(x)]$$

$$S_5(x) = x(1-x)[S_4'(x) + 4nS_3(x)]$$

$$S_6(x) = x(1-x)[S_5'(x) + 5nS_4(x)]$$

Usando (1.34), (1.35) e estas igualdades podemos concluir que $S_3(x)$ é de grao 1 en n ($S_2'(x)$ é de grao 1 en n e $S_1(x) = 0$), $S_4(x)$ de grao 2 en n ($S_3'(x)$ é de grao 1 en n e $3nS_2(x)$ é de grao 2 en n), $S_5(x)$ de grao 2 en n ($S_4'(x)$ é de grao 2 en n e $4nS_3(x)$ é de grao 2 en n) e $S_6(x)$ é de grao 3 en n ($S_5'(x)$ é de grao 2 en n e $5nS_4(x)$ é de grao 3 en n).

Por conseguinte, para algunha constante c, $|S_6(x)| \leq cn^3$ para todo $x \in [0,1]$ e para todo $n \geq 1$.

Por outra banda,

$$\left|\frac{k}{n} - x\right| \geq n^{-1/4} \Rightarrow |k - nx| \geq n^{3/4} \Rightarrow (k-nx)^6 \geq n^{9/2} \Rightarrow \frac{(k-nx)^6}{n^{9/2}} \geq 1.$$

Finalmente

$$\sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| \geq n^{-1/4}} p_{n,k}(x) \leq \frac{1}{n^{9/2}} \sum_{k=0}^{n} (k-nx)^6 p_{n,k}(x) = \frac{1}{n^{9/2}} S_6(x) \leq \frac{c}{n^{3/2}} \quad \forall x \in [0,1]$$

□

Proposición 1.6.1. *Sexa f unha función $n+1$ veces diferenciable en x_0. Entón*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}[f^{(n+1)}(x_0) + \varepsilon(x)]$$

onde $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Este é un resultado coñecido. Pódese consultar no libro [1, Teorema 1.6.6].

Teorema 1.6.1. *(Teorema de Voronowskaja) Sexa $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ unha función limitada. Entón*

$$\lim_{n \to \infty} n[B_n(f; x_0) - f(x_0)] = \frac{1}{2} x_0(1-x_0) f''(x_0)$$

sendo x_0 un punto de $[0,1]$ no cal existe $f''(x_0)$.

Demostración. Sexa $x_0 \in [0,1]$, pola proposición 1.6.1 con $n = 2$ temos

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(x_0) + s(x)(x-x_0)^2$$

onde $\lim\limits_{x \to x_0} s(x) = 0$.

Tomamos $x = \dfrac{k}{n}$ e obtemos

$$f\left(\frac{k}{n}\right) = f(x_0) + f'(x_0)\left(\frac{k}{n} - x_0\right) + \frac{\left(\frac{k}{n} - x_0\right)^2}{2} f''(x_0) + s\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k}{n} - x_0\right)^2$$

Multiplicando ambos lados da igualdade por $p_{n,k}(x_0)$ e sumando dende $k = 0$ ata $k = n$, resulta

$$\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) p_{n,k}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} f(x_0) p_{n,k}(x_0) + \sum_{k=0}^{n} f'(x_0)\left(\frac{k}{n} - x_0\right) p_{n,k}(x_0)$$
$$+ \sum_{k=0}^{n} \frac{f''(x_0)}{2}\left(\frac{k}{n} - x_0\right)^2 p_{n,k}(x_0) + \sum_{k=0}^{n} s\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k}{n} - x_0\right)^2 p_{n,k}(x_0) \tag{1.36}$$

Analicemos agora termo a termo tendo en conta a observación 1.2.1:

$$\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) p_{n,k}(x_0) = B_n(f; x_0)$$

$$\sum_{k=0}^{n} f(x_0) p_{n,k}(x_0) = f(x_0)$$

$$\sum_{k=0}^{n} f'(x_0)\left(\frac{k}{n} - x_0\right) p_{n,k}(x_0) = f'(x_0)\left[\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} p_{n,k}(x_0) - x_0 \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x_0)\right] = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f''(x_0)}{2}\left(\frac{k}{n} - x_0\right)^2 p_{n,k}(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2}\left[\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 p_{n,k}(x_0) - 2x_0 \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} p_{n,k}(x_0) + x_0^2 \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x_0)\right]$$
$$= \frac{f''(x_0)}{2}\left[x_0^2 + \frac{1}{n} x_0(1 - x_0) - 2x_0^2 + x_0^2\right] = \frac{f''(x_0) x_0 (1 - x_0)}{2n}$$

Polo tanto (1.36) queda

$$B_n(f; x_0) - f(x_0) - \frac{f''(x_0) x_0 (1 - x_0)}{2n} = \sum_{k=0}^{n} s\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k}{n} - x_0\right)^2 p_{n,k}(x_0) \tag{1.37}$$

Chamamos S ao lado dereito da igualdade anterior. Dado $\varepsilon > 0$, podemos atopar n suficientemente grande tal que para todo $x, x_0 \in [0, 1]$, con $|x - x_0| < n^{-1/4}$ tense que $|s(x)| \leq \varepsilon$. Polo cal,

$$|S| \leq \sum_{\left|\frac{k}{n} - x_0\right| < \frac{1}{n^{1/4}}} \left|s\left(\frac{k}{n}\right)\right| \left(\frac{k}{n} - x_0\right)^2 p_{n,k}(x_0) + \sum_{\left|\frac{k}{n} - x_0\right| \geq \frac{1}{n^{1/4}}} \left|s\left(\frac{k}{n}\right)\right| \left(\frac{k}{n} - x_0\right)^2 p_{n,k}(x_0)$$

$$\leq \varepsilon \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x_0\right)^2 p_{n,k}(x_0) + M \sum_{\left|\frac{k}{n} - x_0\right| \geq \frac{1}{n^{1/4}}} p_{n,k}(x_0)$$

onde $M = \sup_{0 \leq x \leq 1} s(x)(x - x_0)^2$; dito supremo existe por ser f limitada.

Usando (1.15) e o lema 1.6.1 temos

$$|S| \leq \varepsilon \frac{x_0(1 - x_0)}{n} + M \frac{c}{n^{3/2}}$$

Volvendo a (1.37) e multplicando ambos lados da igualdade por n

$$\left| n[B_n(f; x_0) - f(x_0)] - \frac{f''(x_0)x_0(1 - x_0)}{2} \right| = |nS| \leq \varepsilon x_0(1 - x_0) + M \frac{c}{n^{1/2}}$$

Dado que ε é arbitrario,

$$\lim_{n \to \infty} n[B_n(f; x_0) - f(x_0)] = \frac{f''(x_0)x_0(1 - x_0)}{2}$$

$\square$

Con isto vemos que a converxencia dos polinomios de Bernstein é lenta, pois para n grande $B_n(f, x_0) - f(x_0)$ compórtase como $\frac{c_0}{n}$, onde $c_0 = \frac{f''(x_0)x_0(1 - x_0)}{2}$, e en xeral terase que $c_0 \neq 0$. A converxencia é lenta aínda que f sexa unha función de clase C^∞ ou mesmo analítica.

Capítulo 2

Curvas de Bézier

Neste capítulo veremos as curvas de Bézier e as súas propiedades.
Usarase o libro [4, Cap. 1, Sec. 3].

2.1 Introdución

Definición 2.1.1. *Unha* ***curva de Bézier de n-ésimo grao*** $(n \geq 1)$ *vén dada pola expresión:*

$$C_n(P_0, \dots, P_n; t) = \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(t) P_k \quad 0 \leq t \leq 1 \tag{2.1}$$

onde os $P_k \in \mathbb{R}^d$ *son os puntos de control e os* $p_{n,k}(t)$ *son os polinomios de base de Bernstein de grao* n.

Os puntos de control $P_k, k = 0, \dots, n$, son os vértices do polígono de control da curva de Bézier.

É sinxelo ver que $C_n(P_0, \dots, P_n; 0) = P_0$ e $C_n(P_0, \dots, P_n; 1) = P_n$; isto dinos que unha curva de Bézier comeza en P_0 e remata en P_n. Agora ben, en xeral unha curva de Bézier non pasa por $P_1, \dots, P_{n-1}$.

Nas aplicacións prácticas en deseño e enxeñaría $d = 2$ ou $d = 3$.

2.2 Exemplos de curvas de Bézier

Vexamos uns casos sinxelos de curvas de Bézier.
Para obter as expresións usaremos as igualdades (1.1) e (2.1).

Curvas lineales de Bézier

Caso $n = 1$: $C_1(P_0, P_1; t) = (1 - t)P_0 + tP_1$
Tense que $C_1(P_0, P_1; 0) = P_0$ e $C_1(P_0, P_1; 1) = P_1$.
As curvas de Bézier de grao 1 son segmentos de liñas rectas de P_0 a P_1.

Curvas cuadráticas de Bézier

Caso $n = 2$: $C_2(P_0, P_1, P_2; t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2$
Tense que $C_2(P_0, P_1, P_2; 0) = P_0$ e $C_2(P_0, P_1, P_2; 1) = P_2$.
As curvas de Bézier de grao 2, en xeral, son arcos de parábolas de P_0 a P_2.

Curvas cúbicas de Bézier

Caso $n = 3$: $C_3(P_0, P_1, P_2, P_3; t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3 P_3$
Tense que $C_3(P_0, P_1, P_2, P_3; 0) = P_0$ e $C_3(P_0, P_1, P_2, P_3; 1) = P_3$.
As curvas de Bézier de grao 3 van de P_0 a P_3.

2.3 Propiedades das curvas de Bézier

Nesta sección imos ver e demostrar algunhas propiedades das curvas de Bézier.

Proposición 2.3.1. *Cúmprese que*

$$C_n(P_0, \ldots, P_n; t) = (1-t)C_{n-1}(P_0, \ldots, P_{n-1}; t) + tC_{n-1}(P_1, \ldots, P_n; t)$$

Demostración. De (2.1) obtemos

$$C_{n-1}(P_0, \ldots, P_{n-1}; t) = \sum_{k=0}^{n-1} p_{n-1,k}(t) P_k \tag{2.2}$$

$$C_{n-1}(P_1, \ldots, P_n; t) = \sum_{k=0}^{n-1} p_{n-1,k}(t) P_{k+1} \tag{2.3}$$

Desenvolvemos agora $C_n(P_0, \ldots, P_n; t)$ da seguinte forma:

$$C_n(P_0, \ldots, P_n; t) = \sum_{k=1}^{n-1} p_{n,k}(t) P_k + p_{n,0}(t) P_0 + p_{n,n}(t) P_n$$

Usando a proposición 1.2.2

$$\begin{aligned}
C_n(P_0, \ldots, P_n; t) &= \sum_{k=1}^{n-1} (tp_{n-1,k-1}(t) + (1-t)p_{n-1,k}(t))P_k + (1-t)p_{n-1,0}(t)P_0 + tp_{n-1,n-1}(t)P_n \\
&= (1-t)\left(\sum_{k=1}^{n-1} p_{n-1,k}(t)P_k + p_{n-1,0}(t)P_0\right) + t\left(\sum_{k=1}^{n-1} p_{n-1,k-1}(t)P_k + p_{n-1,n-1}(t)P_n\right) \\
&= (1-t)\sum_{k=0}^{n-1} p_{n-1,k}(t)P_k + t\left(\sum_{j=0}^{n-2} p_{n-1,j}(t)P_{j+1} + p_{n-1,n-1}(t)P_n\right)
\end{aligned}$$

$$= (1-t)\sum_{k=0}^{n-1} p_{n-1,k}(t)P_k + t\sum_{j=0}^{n-1} p_{n-1,j}(t)P_{j+1}$$
$$= (1-t)C_{n-1}(P_0,\dots,P_{n-1};t) + tC_{n-1}(P_1,\dots,P_n;t)$$

onde na última igualdade temos usado (2.2) e (2.3).

□

Da proposición que acabamos de ver deducimos que unha curva de Bézier de grao n é unha interpolación entre as curvas de Bézier de grao $n-1$.

A continuación veremos un algoritmo recursivo para calcular curvas de Bézier. Trátase dun método numericamente estable.

Sexa $n=1$: $C_1(P_0,P_1;t) = \sum_{k=0}^{1} p_{1,k}(t)P_k = p_{1,0}(t)P_0 + p_{1,1}(t)P_1 = (1-t)P_0 + tP_1$. Tomando $t=t_0$ e definindo

$$P_{1,0} = (1-t_0)P_0 + t_0P_1,$$

séguese que

$$C_1(P_0,P_1;t_0) = P_{1,0}.$$

Sexa $n=2$:

$$C_2(P_0,P_1,P_2;t) = \sum_{k=0}^{2} p_{2,k}(t)P_k = p_{2,0}(t)P_0 + p_{2,1}(t)P_1 + p_{2,2}(t)P_2 = (1-t)^2P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2P_2.$$

Tomando $t=t_0$ e definindo

$$P_{1,0} = (1-t_0)P_0 + t_0P_1 \tag{2.4}$$

$$P_{1,1} = (1-t_0)P_1 + t_0P_2 \tag{2.5}$$

$$P_{2,0} = (1-t_0)P_{1,0} + t_0P_{1,1} \tag{2.6}$$

séguese que

$$P_{2,0} = (1-t_0)^2P_0 + 2t_0(1-t_0)P_1 + t_0^2P_2.$$

Así pois, podemos calcular

$$C_2(P_0,P_1,P_2;t_0) = P_{2,0}$$

mediante o algoritmo (2.4)-(2.6), que basicamente consiste en facer de forma recursiva interpolacións lineais.

Vexamos agora o caso xeral dunha curva de Bézier de grao n,

Definición 2.3.1. *Fixado $t=t_0$ e denotando $P_{0,i}=P_i, \quad i=0,\dots,n$ definimos*

$$P_{k,i}(t_0) = (1-t_0)P_{k-1,i}(t_0) + t_0P_{k-1,i+1}(t_0) \quad k=1,\dots,n \quad i=0,\dots,n-k \tag{2.7}$$

Este é o denominado Algoritmo de de Casteljau.

Os $P_{k,i}$ calcúlanse facendo un bucle externo en k e un bucle interno en i.
Veremos que

$$C_n(P_0, \dots, P_n; t_0) = P_{n,0}. \tag{2.8}$$

Proposición 2.3.2. *Para todo $k = 0, \dots, n$, tense que*

$$P_{k,i}(t_0) = C_k(P_i, \dots, P_{i+k}; t_0) \quad i = 0, \dots, n-k. \tag{2.9}$$

Demostración. Demostraremos isto por inducción en k. Vexamos o caso $k = 1$: usando (2.7) e tendo en conta que $P_{0,i} = P_i$ obtemos

$$P_{1,i}(t_0) = (1 - t_0)P_{0,i}(t_0) + t_0 P_{0,i+1}(t_0) = (1 - t_0)P_i + t_0 P_{i+1} = C_1(P_i, P_{i+1}; t_0)$$

onde $i = 0, \dots, n-1$.

Supoñamos certo (2.9) para $k-1$ e vexamos que é certo para k.

Usando a definición de $P_{k,i}(t_0)$ temos que

$$P_{k,i}(t_0) = (1 - t_0)P_{k-1,i}(t_0) + t_0 P_{k-1,i+1}(t_0)$$

Por hipótese de inducción (2.9) é certo para $k-1$, polo tanto a igualdade anterior queda da seguinte forma

$$P_{k,i}(t_0) = (1 - t_0)C_{k-1}(P_i, \dots, P_{i+k-1}; t_0) + t_0 C_{k-1}(P_{i+1}, \dots, P_{i+k}; t_0)$$

Da proposición 2.3.1 séguese que

$$P_{k,i}(t_0) = C_k(P_i, \dots, P_{i+k}; t_0) \quad i = 0, \dots, n-k$$

□

Tomando $k = n$ na proposición anterior obtemos

$$P_{n,0}(t_0) = C_n(P_0, \dots, P_n; t_0).$$

Polo que acabamos de ver, o *algoritmo de de Casteljau* permítenos obter $C_n(P_0, \dots, P_n; t_0) = P_{n,0}(t_0)$.

Observación 2.3.1. *Para poder entender a seguinte propiedade das curvas de Bézier precisamos unhas definicións previas:*

- *A envolvente convexa dun conxunto é a intersección de todos os conxuntos convexos que o conteñen; ou, dito doutro xeito, o menor convexo que contén ó conxunto.*
- *Sexa $X = \{x_1, ..., x_m\}$ un conxunto finito contido en $\mathbb{R}^d$; a súa envolvente convexa $co(X)$ vén dada pola expresión*

$$co(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i \mid \alpha_i \in \mathbb{R}, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, m, \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1 \right\}$$

- *No caso de puntos nun plano, se non todos os puntos están aliñados, a súa envolvente convexa é un polígono convexo cuxos vértices son algúns dos puntos do conxunto inicial de puntos.*

Os contidos desta observación poden ser consultados no libro [5, Páxs. 34 e 35]

Proposición 2.3.3. *A curva de Bézier está contida na envolvente convexa do cunxunto formado polos puntos de control.*

En vista da observación 2.3.1, a positividade dos $p_{n,k}(t)$ para $t \in [0,1]$ e a propiedade (1.3) , a proposición é inmediata.

A seguinte proposición afirma basicamente que unha curva en $\mathbb{R}^d$ parametrizada en $[0,1]$ é unha curva de Bézier de grao n se e só se cada unha das súas compoñentes é un polinomio de grao menor ou igual ca n.

Observación 2.3.2. *Entendemos curva en $\mathbb{R}^d$ como unha aplicación de clase 1, $C : [a,b] \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^d$. Non se impón que a derivada sexa distinta de cero en todo punto, polo cal nalgún punto a curva pode non ter tanxente.*

Proposición 2.3.4. *Sexa $C_n : [0,1] \mapsto \mathbb{R}^d$, entón*

$$C_n(t) = C_n(P_0, \dots, P_n; t) = \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(t) P_k \Leftrightarrow C_n \in (\mathbb{P}_n)^d$$

Demostración. " $\Rightarrow$ " É inmediato, xa que $P_k \in \mathbb{R}^d$ e $p_{n,k} \in \mathbb{P}_n$.

" $\Leftarrow$ " Se $C_n \in (\mathbb{P}_n)^d$, entón $(C_n)_i \in \mathbb{P}_n$, $i = 1, \dots, d$.

Pola proposición 1.2.4, podemos escribir $(C_n(t))_i$ como segue:

$$(C_n(t))_i = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{ik} p_{n,k}(t), \quad i = 1, \dots, d,$$

onde os α_{ik} son números reais.

Polo cal

$$C_n(t) = \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(t) P_k = C_n(P_0, \dots, P_n; t),$$

onde $P_k \in \mathbb{R}^d$ é tal que $(P_k)_i = \alpha_{ik}$, $i = 1, \dots, d$.

□

Proposición 2.3.5. *Todo arco dunha curva de Bézier é unha curva de Bézier.*

Demostración. Da proposición anterior deducimos que un arco de curva de Bézier de grao n é unha curva cuxas compoñentes son polinomios de grao menor ou igual ca n. Pero o dominio de parametrización é un subintervalo $[t_0, t_1] \subset [0,1]$, sendo t_0 e t_1 os valores dos parámetros correspondentes aos puntos extremos do arco.

Facendo o cambio de variable $t = (t_1 - t_0)\tau + t_0$, obtemos unha parametrización do arco con dominio $[0, 1]$. Como dito cambio é unha transformación afín, as compoñentes do arco en función de τ seguen sendo polinomios de grao menor ou igual ca n.

Polo tanto, pola proposición 2.3.4 o arco é unha curva de Bézier. □

2.4 Derivadas das curvas de Bézier

As curvas de Bézier son infinitamente derivables. Veremos na seguinte proposición a expresión da primeira derivada dunha curva de Bézier de grao n.

Proposición 2.4.1. *Tense que*

$$C'_n(P_0, \dots, P_n; t) = n \sum_{k=0}^{n-1} p_{n-1,k}(t)(P_{k+1} - P_k)$$

Demostración. Derivando (2.1) obtemos

$$C'_n(P_0, \dots, P_n; t) = \sum_{k=0}^{n} p'_{n,k}(t) P_k$$

Tendo en conta a proposición 1.2.3

$$\begin{aligned}
C'_n(P_0, \dots, P_n; t) &= \sum_{k=1}^{n-1} n(p_{n-1,k-1}(t) - p_{n-1,k}(t))P_k - np_{n-1,0}(t)P_0 + np_{n-1,n-1}(t)P_n \\
&= n\left(\sum_{k=2}^{n-1} p_{n-1,k-1}(t)P_k + p_{n-1,0}(t)P_1\right) - n\left(\sum_{k=1}^{n-2} p_{n-1,k}(t)P_k + p_{n-1,n-1}(t)P_{n-1}\right) \\
&\qquad -np_{n-1,0}(t)P_0 + np_{n-1,n-1}(t)P_n \\
&= n\left(\sum_{k=2}^{n-1} p_{n-1,k-1}(t)P_k - \sum_{k=1}^{n-2} p_{n-1,k}(t)P_k\right) + np_{n-1,0}(t)(P_1 - P_0) + np_{n-1,n-1}(t)(P_n - P_{n-1}) \\
&= n\left(\sum_{k=1}^{n-2} p_{n-1,k}(t)P_{k+1} - \sum_{k=1}^{n-2} p_{n-1,k}(t)P_k\right) + np_{n-1,0}(t)(P_1 - P_0) + np_{n-1,n-1}(t)(P_n - P_{n-1}) \\
&= n\sum_{k=1}^{n-2} p_{n-1,k}(t)(P_{k+1} - P_k) + np_{n-1,0}(t)(P_1 - P_0) + np_{n-1,n-1}(t)(P_n - P_{n-1}) \\
&= n\sum_{k=0}^{n-1} p_{n-1,k}(t)(P_{k+1} - P_k)
\end{aligned}$$

como queríamos demostrar. □

Desta proposición deducimos:

- A derivada dunha curva de Bézier de grao n é unha curva de Bézier de grao $n-1$.
- Vexamos a derivada dunha curva de Bézier en $t=0$ e $t=1$:

$$C_n'(P_0, \dots, P_n; 0) = n \sum_{k=0}^{n-1} p_{n-1,k}(0)(P_{k+1} - P_k) = n(P_1 - P_0)$$

  e

$$C_n'(P_0, \dots, P_n; 1) = n \sum_{k=0}^{n-1} p_{n-1,k}(1)(P_{k+1} - P_k) = n(P_n - P_{n-1})$$

  Polo tanto, o comezo (final) da curva de Bézier é tanxente á primeira (última) sección do polígono de control de dita curva.

Apéndice: Diferenzas finitas progresivas

Definición .0.1. *Dada unha secuencia de valores* $y_0, y_1, \ldots$ *, as diferenzas progresivas veñen dadas pola expresión:*

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n \tag{10}$$

sendo n *un enteiro,* $n \geq 0$*. As diferenzas progresivas de orde maior son definidas de xeito similar:*

$$\Delta^2 y_n = \Delta(\Delta y_n) = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n = (y_{n+2} - y_{n+1}) - (y_{n+1} - y_n) \tag{11}$$

En xeral,

$$\Delta^{k+1} y_n = \Delta(\Delta^k y_n) = \Delta^k y_{n+1} - \Delta^k y_n \tag{12}$$

Por definición $\Delta^0 y_n = y_n$*.*

Proposición .0.2. *Cúmprese que*

$$\Delta^k y_n = \sum_{t=0}^{k} (-1)^{k-t} \binom{k}{t} y_{n+t} \tag{13}$$

A demostración desta proposición pódese consultar no libro [1, teorema 2.7.1].

Vexamos agora como aplicar as diferenzas progresivas a unha función $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$.

Se $a \leq x_0 < x_0 + h < x_0 + 2h \leq b$, entón

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0) \tag{14}$$

$$\Delta^2 f(x_0) = f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) + f(x_0) \tag{15}$$

De maneira xeral, se $a \leq x_0 < x_0 + h < \ldots < x_0 + kh \leq b$, $\Delta^k f(x_0)$ é o resultado de aplicar a definición .0.1 á secuencia $f(x_0), f(x_0 + h), \ldots, f(x_0 + kh)$.

Teorema .0.1. *Sexa* k *un enteiro,* $k \geq 1$*. Sexa* $f \in C^{k-1}([a, b])$ *tal que existe* $f^{(k)}$ *para cada punto de* (a, b)*, entón*

$$\Delta^k f(x_0) = h^k f^{(k)}(\xi) \quad x_0 < \xi < x_0 + kh \tag{16}$$

Este teorema está no libro [1, Corolario 3.4.4]

Bibliografía

[1] Philip J. Davis. *Interpolation and Approximation.* Dover Publications (1975)

[2] G.G.Lorentz. *Bernstein Polynomials.* American Mathematical Society (1997)

[3] G.G.Lorentz. *Approximation of Functions.* Holt, Rinehart and Winston (1966)

[4] Les Piegl, Wayne Tiller. *The NURBS Book.* Springer, 2ª edición (1997)

[5] Wenyu Sun, Ya-Xiang Yuan. *Optimization Theory and Methods.* Springer (2006)